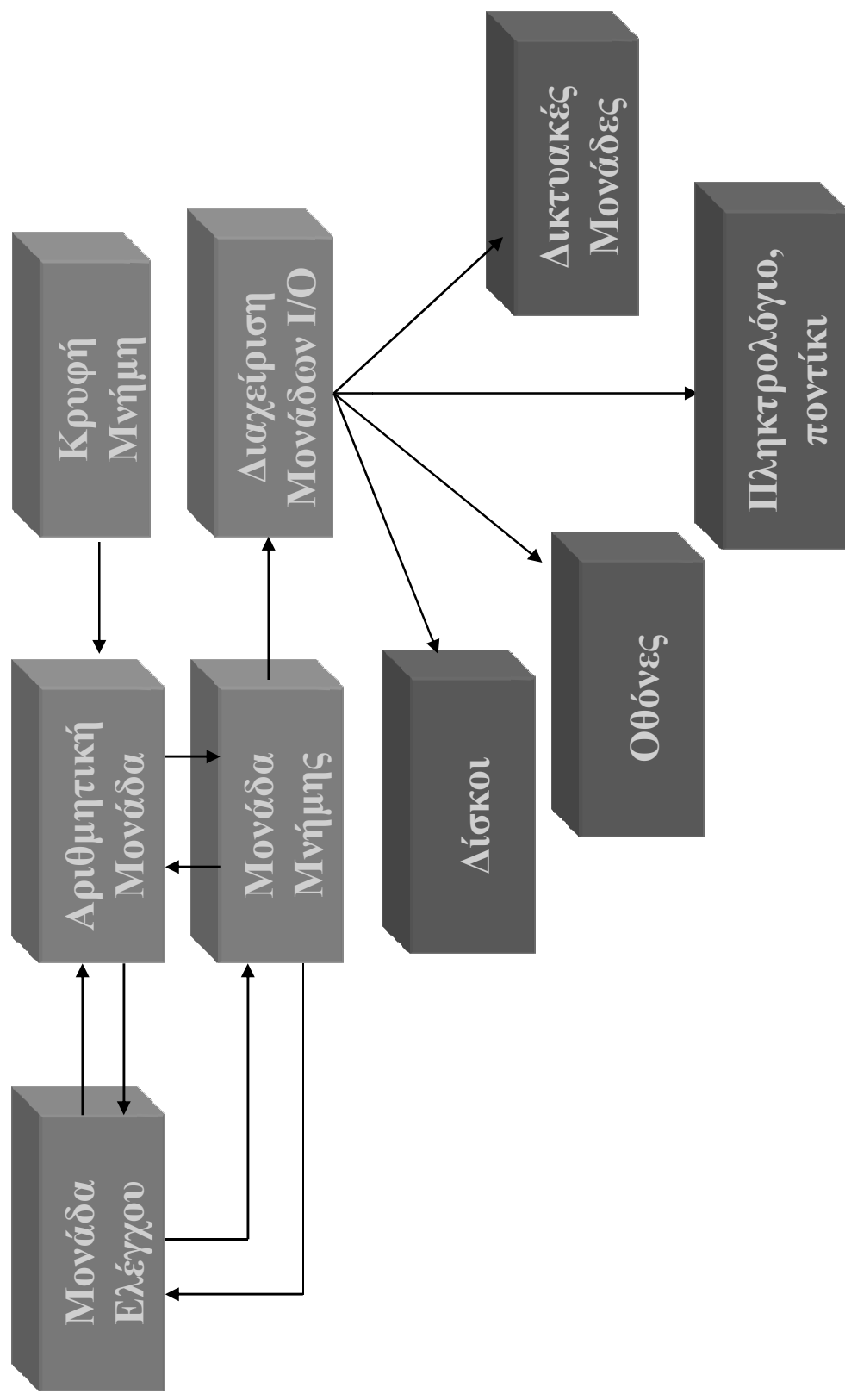

1^η Θεματική Ενότητα : Διαδικά Συστήματα

Ψηφιακοί Υπολογιστές



Δυαδικοί Αριθμοί

Δεκαδικό Σύστημα: Βάση το 10, ψηφία 10 και συντελεστές x δυνάμεις του 10

$$7392.25 = 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \text{ όπου } 0 \leq a_i \leq 9, \dots + a_i \times 10^i + \dots$$

Δυαδικό Σύστημα: Βάση το 2, ψηφία 2 και συντελεστές x δυνάμεις του 2

$$1011.01 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \text{ όπου } 0 \leq a_i \leq 1, \dots + a_i \times 2^i + \dots$$

r-αδικό Σύστημα: Βάση το r, ψηφία r και συντελεστές x δυνάμεις του r

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} a_{-2} r^{-2} \dots + a_{-m} r^{-m}$$

$$\text{όπου } 0 \leq a_i \leq r-1$$

Δυαδικοί Αριθμοί

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1
Αριθμοί σε διάφορες βάσεις

Δεκαδικό (βάση 10)	Δυαδικό (βάση 2)	Οκταδικό (βάση 8)	Δεκαεξαδικό (βάση 16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Δυαδικοί Αριθμοί – Αριθμητικές Πράξεις

$$\begin{array}{r}
 1011110 \\
 \hline
 101101 \\
 + 100111 \\
 \hline
 1010100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 A + B + C_{in} = C \ S \\
 A + (B + C_h) = C \ S \\
 0 + (0 + 10) = 00 \ 10 \\
 0 + (10 + 01) = 01 \ 11 \\
 0 + (11 + 10) = 11 \ 01 \\
 1 + (01 + 01) = 01 \ 10 \\
 1 + (00 + 10) = 10 \ 01 \\
 1 + (10 + 01) = 10 \ 00 \\
 1 + (11 + 10) = 10 \ 10 \\
 1 - (1 + 1) = 1 \ 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1010110 \\
 101 \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\
 \hline
 0110 \\
 - 101 \\
 \hline
 001
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1011 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1011 \\
 0000 \\
 1011 \\
 \hline
 110111
 \end{array}$$

Μετατροπή Αριθμού από Βάση r σε Βάση 10

r-αδικό σύστημα αρίθμησης:

Πολ/ζουμε κάθε συντελεστή με την αντίστοιχη δύναμη του r και κάνουμε πρόσθεση

$$(630.4)_8 = 6 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 0 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = 384 + 24 + 0.5 = (408.5)_{10}$$

Δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

Βρίσκουμε το άθροισμα των δυνάμεων του 2 εκείνων των συντελεστών που έχουν τιμή 1.

$$(1010.011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = 8 + 2 + 0.25 + 0.125 = (10.375)_{10}$$

Μετατροπή Δεκαδικού Αριθμού σε Βάση r

Ακέραιο Μέρος

$$X = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0$$

$$X/r = [a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \dots + a_2 r^1 + a_1] + a_0/r \quad (a_0 < r)$$

$$X \bmod r = a_0$$

$$(X/r)_{\text{στοκοπή}} = a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \dots + a_2 r^1 + a_1$$

Διαδοχικές Διαιρέσεις
με r

Οι συντελεστές
είναι τα υπόλοιπα

Παράδειγμα: Μετατροπή του 41 στο δυαδικό σύστημα

$$41 : 2 = 20 + 1 / 2$$

$$20 : 2 = 10 + 0 / 2$$

$$10 : 2 = 5 + 0 / 2$$

$$5 : 2 = 2 + 1 / 2$$

$$2 : 2 = 1 + 0 / 2$$

$$1 : 2 = 0 + 1 / 2$$

$$\rightarrow (41)_{10} = (101001)_2$$

Μετατροπή Δεκαδικού Αριθμού σε Αριθμό σε Βάση r

Κλασματικό Μέρος

$$X = a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + \dots + a_m r^{-m}$$

$$X * r = a_{-1} + a_{-2}r^{-1} + \dots + a_m r^{-(m-1)}$$

$$(X * r)_{\text{ακέραιο μέρος}} = a_{-1}$$

$$(X * r)_{\text{χωρίς ακέραιο μέρος}} = a_{-2}r^{-1} + \dots + a_m r^{-(m-1)}$$

Διαδοχικοί Πολλαπλασιασμοί
με r

Οι συντελεστές είναι
τα ακέραια μέρη

Παράδειγμα: Μετατροπή του .6875 στο δυαδικό σύστημα

$$.6875 \times 2 = 1 \quad .3750$$

$$.3750 \times 2 = 0 \quad .7500$$

$$.7500 \times 2 = 1 \quad .5000$$

$$.5000 \times 2 = 1 \quad .0000$$

$$\rightarrow (.6875)_{10} = (.1011)_2$$

Μετατροπή 8-/16-αδικού Αριθμού σε Δυαδικό και αντίστροφα

Κάθε οκταδικό/δεκαεξαδικό ψηφίο αντιστοιχεί σε 3/4 δυαδικά ψηφία:

Εύκολη Μετατροπή & Συμπύεση Δεδομένων

Παράδειγμα: 8-αδικό σε δυαδικό και αντίστροφα

010	110	001	101	011	. 111	100	000	110	
2	6	1	5	3	.	7	4	0	6

Παράδειγμα: 16-αδικό σε δυαδικό και αντίστροφα

0010	1100	0110	1011	. 1111	0000	0110	
2	C	6	B	.	F	0	6

Μετατροπή Βάσης Αριθμού: Ανακεφαλαίωση

1) Μετατροπή από r -αδικό σε δεκαδικό:

Πολ/ζουμε τους συντελεστές με τις αντίστοιχες δυνάμεις της βάσης r και προσθέτουμε.

2) Μετατροπή από δεκαδικό σε r -αδικό:

Χωρίζουμε ακέραιο και κλασματικό μέρος.

Ακέραιο μέρος: διαιρούμε συνέχεια με r και κρατάμε το υπόλοιπο.

Κλασματικό μέρος: πολ/ζουμε συνέχεια με r και κρατάμε το ακέραιο μέρος.

3) Μετατροπή από 8-αδικό/16-αδικό σε δυαδικό:

Αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο με τον αντίστοιχο 3-ψηφιο/4-ψηφιο δυαδικό αριθμό.

4) Μετατροπή από δυαδικό σε 8-αδικό/16-αδικό:

Ομαδοποιούμε τα δυαδικά ψηφία σε τριάδες/τετράδες και αντικαθιστούμε κάθε μία με το αντίστοιχο ψηφίο του 8-/16-αδικού.

Συμπληρώματα

Τα συμπληρώματα απλοποιούν την πράξη της αφαίρεσης:

- α) Συμπλήρωμα ως προς Βάση
- β) Συμπλήρωμα ως προς Βάση-1

Συμπλήρωμα ως προς Βάση $r - 1$ αριθμού με n ψηφία

$$A' = (r^n - 1) - A$$

Δεκαδικό σύστημα: (για 4 ψηφία) $A' = 9999 - A$

=> αφαίρεση κάθε ψηφίου του A από το 9 (δεν υπάρχουν κρατούμενα)

Δυαδικό σύστημα: $A' = 11...1 - A$

=> αντιστροφή κάθε ψηφίου

$$1011010011' = 0100101100$$

Συμπληρώματα

Συμπλήρωμα ως προς Βάση r

$$A_{\sigma r} = r^n - A \text{ για } A \neq 0 \text{ και } A_{\sigma r} = 0 \text{ για } A = 0$$

$$A_{\sigma r} = r^n - A - 1 + 1 = [(r^n - 1) - A] + 1 = A' + 1$$

Εύρεση του συμπληρώματος ως προς r-1 και πρόσθεση του 1

$$1011010011_{\sigma_2} = 0100101100 + 1 = 0100101101$$

Συμπληρώματα: Ανακεφαλαίωση

Συμπλήρωμα ως προς Βάση $r - 1$:

Αφαιρούμε κάθε ψηφίο από το $r - 1$.

Συμπλήρωμα ως προς Βάση r :

1) Βρίσκουμε το συμπλήρωμα ως προς $r - 1$ και προσθέτουμε 1.

ή

2) Αφαιρούμε το πρώτο μη-μηδενικό λιγότερο σημαντικό ψηφίο από το r και όλα τα υπόλοιπα περισσότερο σημαντικά ψηφία από το $r - 1$.

Αφαίρεση με Συμπληρώματα

Η αφαίρεση δύο αριθμών $M - N$ σε βάση r και με n ψηφία γίνεται ως εξής:

1. Προσθέτουμε στο μειωτέο M το συμπλήρωμα ως προς r του αφαιρετέου οπότε έχουμε $M + (r^n - N) = M - N + r^n$
2. Αν $M \geq N$ το άθροισμα θα έχει τελικό κρατούμενο r^n το οποίο αγνοούμε
3. Αν $M < N$ το άθροισμα δεν έχει τελικό κρατούμενο και ισούται με $-(N - M)$ το οποίο είναι το συμπλήρωμα ως προς r του $N - M$. Με συμπλήρωμα ως προς r του αθροίσματος βρίσκουμε το $N - M$ με πρόσημο $(-)$ μπροστά.

$$\begin{array}{r} \underline{M - N = 72532 - 3250} \\ 72532 \\ (\text{Συμπλ. } 10) + 96750 \\ \hline 169282 \\ (\text{Αγνώ κρατ}) - \underline{100000} \\ 69282 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{M - N = 3250 - 72532} \\ 3250 \\ (\text{Συμπλ. } 10) + 27468 \\ \hline 30718 \\ (\text{Δεν υπάρχει κρατ}) \underline{\hspace{1cm}} \\ - 69282 \end{array}$$

Προσημασμένοι Δυαδικοί Αριθμοί

Το πρόσημο δηλώνεται με την τοποθέτηση ενός bit στην αριστερότερη θέση ($0=+$, $1=-$)

Τρόποι
Απεικόνισης

Προσημασμένο Μέτρο: Το αριστερότερο bit πρόσημο και το υπόλοιπο είναι το μέτρο (απόλυτη τιμή)

Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 1: Το αριστ. bit πρόσημο και όλος ο αριθμός (με το πρόσημο) σε συμπλ. ως προς 1

Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2: Το αριστ. bit πρόσημο και όλος ο αριθμός (με το πρόσημο) σε συμπλ. ως προς 2

Το Προσημασμένο Μέτρο χρησιμοποιείται στην συνηθισμένη αριθμητική αλλά δεν είναι εύχρηστο για τον H/Y. Πιο εύκολη αναπαράσταση για τον H/Y είναι το Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2.

Προσημασμένο Μέτρο: 10001001

Προσημασμένο Συμπλ. ως προς 1: 11110110

Προσημασμένο Συμπλ. ως προς 2: 11110111

Απεικόνιση
με 8 ψηφία
του -9

Αριθμητική Πρόσθεση/Αφαίρεση

Αριθμητική Πρόσθεση (απαιτεί σύγκριση προσήμων)

1. Αν τα πρόσθημα είναι ίδια προσθέτουμε τα μέτρα με τελικό πρόσθημο το κοινό.
2. Αν τα πρόσθημα είναι διαφορετικά αφαιρούμε από τον μεγαλύτερο τον μικρότερο με τελικό πρόσθημο αυτό του μεγαλύτερου

Πρόσθεση Προσημασμένου Συμπληρώματος ως προς 2

Απλή πρόσθεση και το τελικό κρατούμενο αγνοείται. Αν το αποτελεσμα είναι αρνητικό θα είναι σε συμπλήρωμα ως προς 2. Καμία μετατροπή ή σύγκριση δεν απαιτείται.

Αφαίρεση Προσημασμένου Συμπληρώματος

Αφαίρεση Προσημασμένου Συμπληρώματος ως προς 2 (8 ψηφίων)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Πχ } (-6) - (-13) \\ 6 = 00000110 \\ 13 = 00001101 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 = 11111010 \\ -13 = 11110011 \end{array}$$

$$(-6) - (-13) =$$

$$11111010 - 11110011 =$$

$$11111010 + 00001101 =$$

$$00000111 = +7$$

Δυαδικοί Κώδικες

Είναι τρόποι αναπαράστασης πληροφοριών με χρήση δυαδικών ψηφίων (bits).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-2
Δυαδικοί κώδικες για τα δεκαδικά ψηφία

Δεκαδικό ψηφίο	(BCD) 8421	Excess-3	84-2-1	2421	(Biquinary) 5043210
0	0000	0011	0000	0000	0100001
1	0001	0100	0111	0001	0100010
2	0010	0101	0110	0010	0100100
3	0011	0110	0101	0011	0101000
4	0100	0111	0100	0100	0110000
5	0101	1000	1011	1011	1000001
6	0110	1001	1010	1100	1000010
7	0111	1010	1001	1101	1000100
8	1000	1011	1000	1110	1001000
9	1001	1100	1111	1111	1010000

Μετατροπή ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα \neq δυαδική κωδικοποίηση

395 { Δυαδικός : 110001011 (9 bits)
Δυαδική Κωδικοποίηση BCD :
0011 1001 0101 (12 bits)

Οι κώδικες excess-3, ο 2 4 2 1, ο 8 4 -2 -1 είναι αυτό-συμπληρωματικοί: το συμπλ. ως προς 9 βγαίνει με αντικατάσταση των 0 - 1.

Ο κώδικας Biquinary ανιχνεύει σφάλματα

Κώδικες Ανίχνευσης Σφαλμάτων

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-3
Bit ισοτιμίας

Τα φυσικά μέσα μετάδοσης επηρεάζονται από θόρυβο και προκαλούν λάθη.

Για αυτό χρησιμοποιούνται οι κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων (π.χ. parity bits).

Η μέθοδος ισοτιμίας ανιχνεύει περιττό αριθμό λαθών

Περιττή Ισοτιμία		Άρτια Ισοτιμία	
Μήνυμα	P	Μήνυμα	P
0000	1	0000	0
0001	0	0001	1
0010	0	0010	1
0011	1	0011	0
0100	0	0100	1
0101	1	0101	0
0110	1	0110	0
0111	0	0111	1
1000	0	1000	1
1001	1	1001	0
1010	1	1010	0
1011	0	1011	1
1100	1	1100	0
1101	0	1101	1
1110	0	1110	1
1111	1	1111	0

Κώδικας Gray

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-4

Κώδικας Gray τεσσάρων bits

Οι διαδοχικοί αριθμοί στον κώδικα gray μεταβάλλονται κατά ένα μόνο bit.

Χρησιμοποιείται όταν κατά τη μετάδοση η μετάβαση γίνεται σε γειτονικούς αριθμούς και θέλουμε να μειώσουμε την αβεβαιότητα κατά την εναλλαγή.

Κώδικας Gray	Ισοδύναμος δεκαδικός
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

Αλφαριθμητικοί Κώδικες

Κώδικας ASCII

Περιλαμβάνει:

τα 10 δεκαδικά ψηφία,

τα 26 γράμματα του αλφαβήτου (x2),

32 ειδικούς χαρακτήρες (&, *, +),

34 χαρακτήρες ελέγχου

$b_4b_3b_2b_1$	$b_7b_6b_5$	000	001	010	011	100	101	110	111
0000		NUL	DLE	SP	0	@	P	'	p
0001		SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010		STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011		ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100		EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0101		ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110		ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111		BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000		BS	CAN	(8	H	X	h	x
1001		HT	EM)	9	I	Y	i	y
1010		LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011		VT	ESC	+	;	K	[k	{
1100		FF	FS	,	<	L	\	l	
1101		CR	GS	-	=	M]	m	}
1110		SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111		SI	US	/	?	O	_	o	DEL

{ Διαμορφωτές Μορφής Κειμένου (backspace, tab)
 Διαχωριστές Πληροφορίας (Διαχωριστής Αρχείων)
 Ελέγχου Επικοινωνίας (STX, ETX)

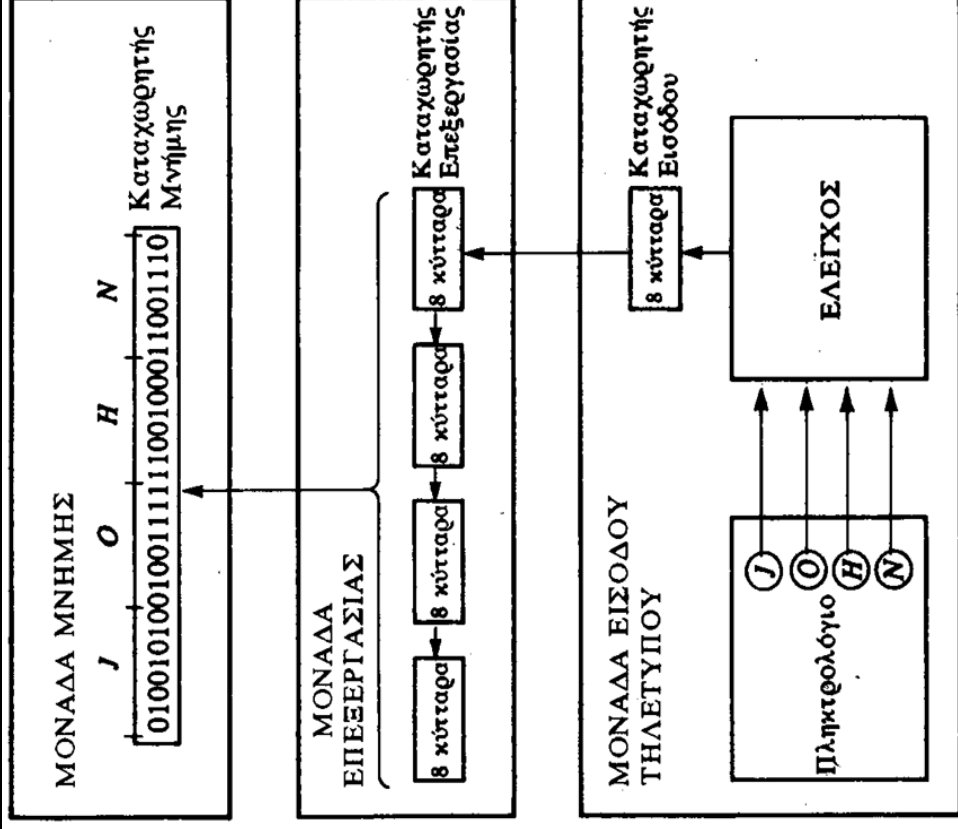
Δυαδική Αποθήκευση και Καταχωρητές

Τα διακριτά στοιχεία πληροφορίας αποθηκεύονται σε δυαδικά κύτταρα (binary cells).

Καταχωρητής : είναι μία ομάδα από δυαδικά κύτταρα.



Το περιεχόμενο του καταχωρητή μπορεί να ερμηνευτεί με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους:
 Ακέραιος: 9829, Αλφαριθμητικά:
 &ε κλπ

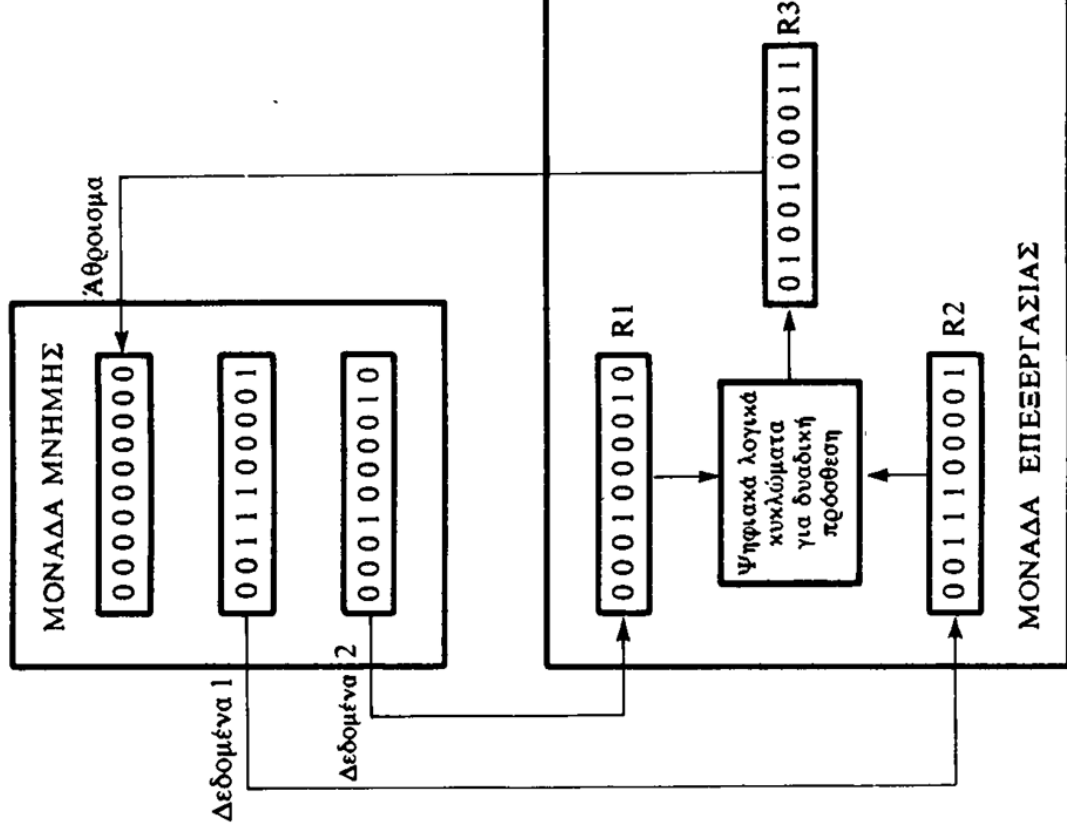


ΣΧΗΜΑ 1-2
 Μεταφορά πληροφορίας μέσω καταχωρητών

Διαδική Αποθήκευση και Καταχωρητές

Η επεξεργασία των δεδομένων απαιτεί εκτός από τα κυκλώματα επεξεργασίας, κυκλώματα αποθήκευσης των πληροφοριών.

Η επεξεργασία γίνεται με ψηφιακά λογικά κυκλώματα, ενώ η συχνότερα χρησιμοποιούμενη δομή αποθήκευσης πληροφοριών είναι ο καταχωρητής



Δυαδική Λογική

Ασχολείται με μεταβλητές που μπορούν να έχουν δύο μόνο διακριτές τιμές, και με λογικές πράξεις.

Λογικές Πράξεις: $\left\{ \begin{array}{l} \text{ΚΑΙ (AND): } X \cdot Y = 1 \text{ όταν } X = Y = 1 \\ \text{Η (OR): } X + Y = 1 \text{ όταν } X = 1 \text{ ή } Y = 1 \\ \text{ΟΧΙ (NOT): } X' = 1 \text{ όταν } X = 0 \end{array} \right.$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-6

Πίνακας αληθείας των λογικών πράξεων

ΚΑΙ		Ή		ΟΧΙ	
x	y	x · y	x + y	x	x'
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Το αριθμητικό $X+Y$ είναι διαφορετικό από το λογικό $X+Y$:

$$1+1=10 \text{ (αριθμ)}, 1+1=1 \text{ (λογικό)}$$

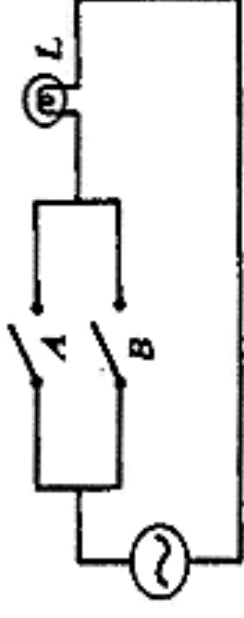
Κυκλώματα Διακοπών και Δυαδικά Σήματα

$L = A \cdot B$ για το κύκλωμα του Σχήματος 1-4(α)

$L = A + B$ για το κύκλωμα του Σχήματος 1-4(β)



(α) Διακόπτες στη σειρά - λογικό ΚΑΙ (AND)



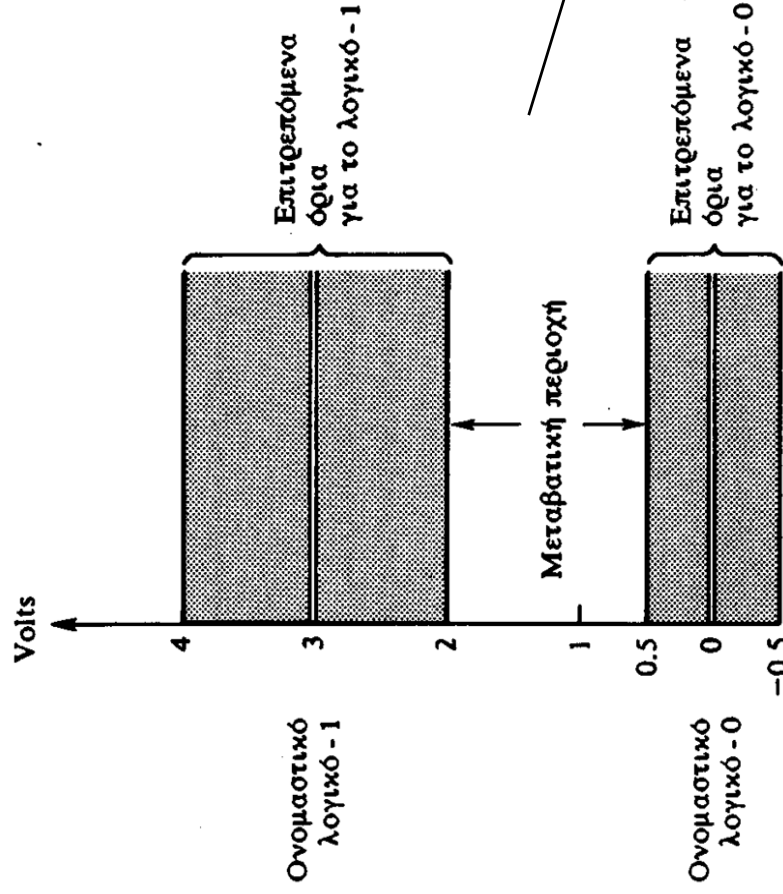
(β) Διακόπτες εν παραλλήλω - λογικό Ή (OR)

Οι χειροκίνητοι διακόπτες παριστάνουν δυο δυαδικές μεταβλητές A και B

Ο λαμπτήρας L παριστάνει μία τρίτη δυαδική μεταβλητή

Τα δύο κυκλώματα εκφράζονται σε δυαδική λογική με τις πράξεις AND και OR

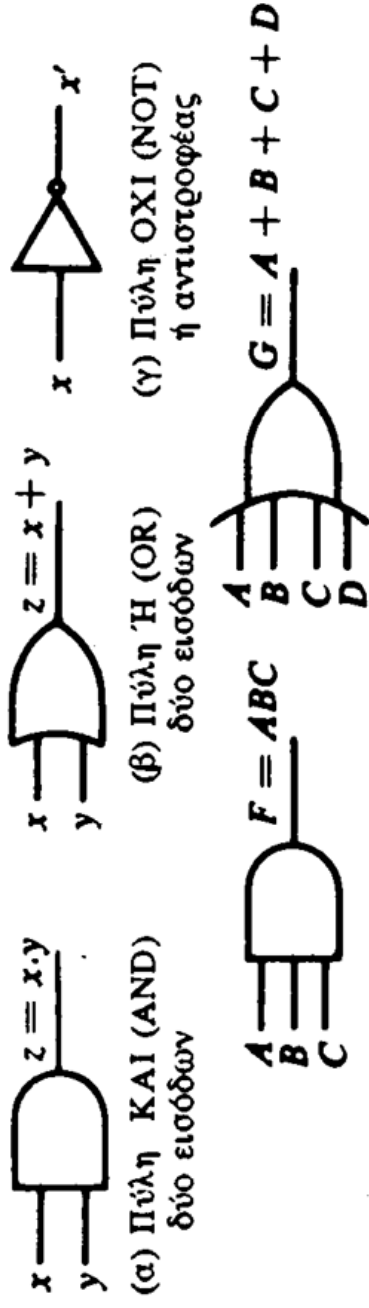
Κυκλώματα Διακοπών και Δυναδικά Σήματα



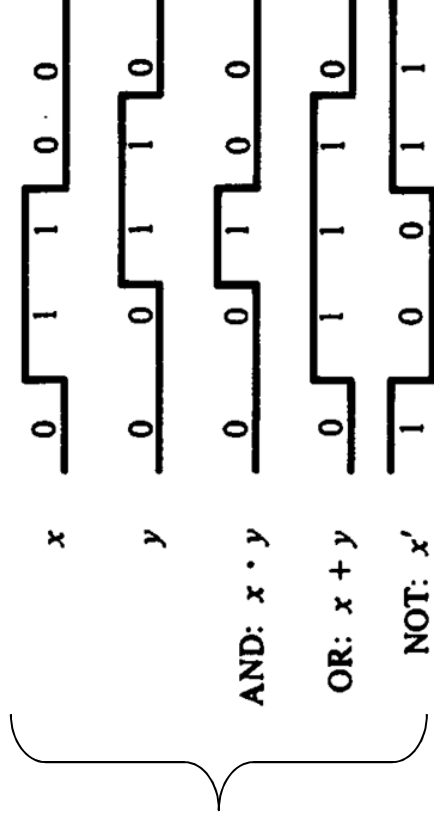
Τα κυκλώματα ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους και τις συνθήκες λειτουργίας τους επηρεάζονται από θόρυβο καθώς η λειτουργία τους δεν είναι απόλυτα σταθερή.

Πραγματική εικόνα λογικών τάσεων και αντιμετώπισης από τα λογικά κυκλώματα

Λογικές Πύλες



Διαγράμματα Λογικής συμπεριφοράς σημμάτων στον άξονα του χρόνου.



ΣΧΗΜΑ 1-7

Σήματα εισόδου-εξόδου για τις πύλες (α), (β), (γ) του Σχήματος 1-6.